

GLOBAL ÁLGEBRA

Marzo 2004

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

(3 puntos)

- a)  $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1$
- b)  $x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = 0$
- c)  $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = -1$

2.- Dado el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$

(1 punto)

Resuélvelo analíticamente

3.- Opera y simplifica:

(2 puntos)

- a)  $\frac{2x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2+x-6}{x} =$
- b)  $\left( \frac{5}{x} - \frac{3x+2}{x+1} \right) : \frac{x-3}{x^2+x} =$

4.- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y responde a las cuestiones:

$$\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

(2 puntos)

- a) Escribe tres puntos que sean solución del sistema.
- b) ¿Es solución el punto (0,1)? ¿Y el (2,-1)?

5.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

(2 puntos)

- a)  $\frac{x+1}{2} < \frac{1+4x}{10} - \frac{2-3x}{5}$
- b)  $2x(1-x) - x + 1 \geq 0$

**SOLUCIONES**

1.- a)  $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1 \Rightarrow x^4 - 5x^2 - 3x^2 + 15 = -1 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0$  ecuación bicuadrada, que haciendo el cambio  $z = x^2$ , queda la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 8z + 16 = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

b)  $x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = 0$  para resolver esta ecuación, factorizamos el polinomio

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = x(x^3 - x^2 - 9x + 9) = x(x - 1)(x^2 - 9) = x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & & 1 & 0 & -9 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array} \quad x(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) \sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = -1 \Rightarrow \sqrt{2x} + 1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (\sqrt{2x} + 1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$(\sqrt{2x})^2 + 2\sqrt{2x} + 1 = x + 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x} = x + 1 - 2x - 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x} = -x$$

$$(2\sqrt{2x})^2 = (-x)^2 \Rightarrow 4 \cdot 2x = x^2 \Rightarrow 8x - x^2 = 0 \Rightarrow x(8 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\sqrt{0} - \sqrt{0+1} = 0 - 1 = -1 \text{ SI} \quad \sqrt{16} - \sqrt{8+1} = 4 - 3 = 1 \neq -1 \text{ NO}$$

LUEGO, LA SOLUCIÓN ES  $x = 0$

$$2.- \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y = 5 \end{cases} \text{ por sustitución, despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la}$$

$$\text{segunda: } y = x - 1 \Rightarrow x^2 + (x - 1) = 5 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 - 1 = -4 \end{cases} \text{ SOLUCIONES } (2, 1) \text{ y } (-3, -4)$$

$$3.- a) \frac{2x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2+x-6}{x} = \frac{(2x+1)(x^2+x-6)}{(x-2)x} = \frac{(2x+1)(x-2)(x+3)}{(x-2)x} = \frac{(2x+1)(x+3)}{x}$$

$$b) \left( \frac{5}{x} - \frac{3x+2}{x+1} \right) : \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{5(x+1) - x(3x+2)}{x(x+1)} : \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{5x+5-3x^2-2x}{x(x+1)} : \frac{x-3}{x^2+x} =$$

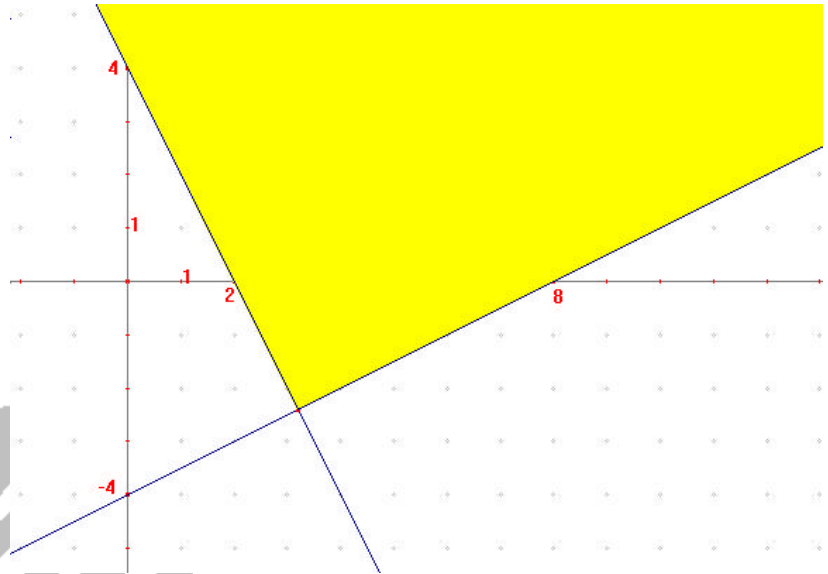
$$= \frac{(-3x^2+3x+5)(x^2+x)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{(-3x^2+3x+5)x(x+1)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{-3x^2+3x+5}{x-3}$$

$$4.- \begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y \leq 8 \end{cases} \text{ Gráficamente, } \begin{cases} 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \\ x - 2y = 8 \Rightarrow -2y = 8 - x \Rightarrow y = \frac{x-8}{2} \end{cases}$$

a) Soluciones del sistema:

(2,5), (4,7) y (5,2)

b) (0,1) no es solución del sistema y (2,-1) tampoco.



$$5.- a) \frac{x+1}{2} < \frac{1+4x}{10} - \frac{2-3x}{5} \Rightarrow \frac{5(x+1)}{10} < \frac{1+4x}{10} - \frac{2(2-3x)}{10}$$

$$5x + 5 < 1 + 4x - 4 + 6x \Rightarrow 5x - 4x - 6x < 1 - 4 - 5 \Rightarrow -5x < -8 \Rightarrow x > \frac{8}{5}$$

Solución:  $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$

$$b) 2x(1-x) - x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 - x + 1 \geq 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 \geq 0$$

para resolver esta inecuación de segundo grado, representamos gráficamente la parábola

$$y = -2x^2 + x + 1$$

mira hacia abajo

$$\text{Vértice: } x = -\frac{1}{-4} = 0'25$$

$$y = -2(0'25)^2 + 0'25 + 1 = 1'125$$

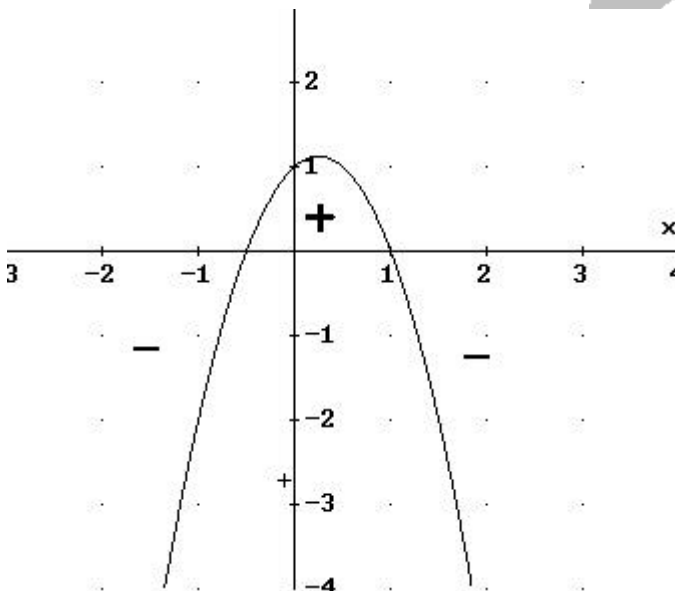
Vértice (0'25, 1'125)

Corte con los ejes:

$$\text{Eje y: } x = 0, y = 1$$

$$\text{Eje x: } -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$$



SOLUCIÓN:  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$